Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics, 35, 1, 2023. (1-18)

Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

Manufacturing Engineering of Iran

The Application of Adaptive Time Spectral Method for Analyzing Inviscid Compressible Flow around a Pitching Airfoil

Research Article

Samad Ghasemi[1], Seyed Majid Malek Jafarian[2]

DOI: 10.22067/jacsm.2022.78842.1138

1. Introduction

Many problems involving fluid flow are periodic. When an object performs a time-dependent periodic movement in the flow field, the created pattern is a periodic temporal flow. Among these problems, we can refer to the flow in turbomachines and the flow around pitching airfoils. The conventional method of solving such problems is to integrate the governing equations and solve them step by step in time until a steady solution is obtained. To numerically solve the governing equations of time-dependent flows (despite the extreme rate of change), small time steps are required, which need powerful processors. In time-periodic flows, an acceptable solution of the governing equations can be achieved by using spectral methods, taking advantage of the property of periodicity, and using a typical processing system. The time spectral method is one type of spectral methods. The disadvantage of the time spectral method is that in the entire computing domain, the number of time intervals in a period is constant, unnecessarily increasing the amount of computer memory and processing time. By using the adaptive time spectral method, this weakness can be eliminated by the optimal distribution of time intervals in the computational domain - proportional to the unsteadiness rate of the flow. This study added the adaptive time spectral method to an inviscid flow solver. The results of this method were compared with the results of the standard (non-adaptive) time spectral method and experimental data. Moreover, two parameters of computer memory and processing time were investigated. The results were obtained for three cases (Case 1, Case 2, and Case 5) of the NACA0012 pitching airfoil. The results showed that while having an acceptable solution accuracy, the amount of computer memory is significantly reduced compared to the standard time-spectral method. The computer processing time for Case 2 and Case 5 for 4-time intervals decreased 21% and 24%, respectively. Moreover, for Case 1 for 4-, 8-, 10-, and 12-time intervals, it decreased 16%, 38%, 31%, and 29%, respectively.

2. Time spectral method

The time-spectral method combines the time derivative operator with spectral accuracy and spatial discretization using the finite difference, finite volume, or finite element method with algebraic accuracy that can be used for different geometry and flow fields. Since the flow variables are time-periodic, they can be expressed in terms of Fourier series at any spatial point.

Applying the adaptive technique to the time-spectral method

Convergence and computer memory can be improved if the number of frequency modes related to the solution Fourier series is considered proportional to the unsteadiness rate in each computational cell. The contribution of each mode in the solution depends on the value of the wave amplitude of that mode. By comparing the wave amplitude value with a reference value, the distribution of frequency modes (time intervals) can be optimally distributed in the computational domain.

3. Numerical Study

Geometric model

This research uses the symmetric NACA0012 airfoil to simulate the flow around a pitching airfoil. Table 1 shows the conditions used in this analysis in three cases, Case 1, Case 2, and Case 5 (assigned by the Agard Institution).

Table 1. Conditions applied to simulate the flow around a pitching airfoil

AGARD Case Number	M_∞	α_m	α_0	K_c
Case 1	0.6	2.89°	2.41°	0.0808
Case 2	0.6	3.16°	4.59°	0.0811
Case 5	0.755	0.016°	2.51°	0.0814

In Table 1, M_∞ is the Mach number of the free stream, α_m is the average angle of attack, α_0 is the maximum oscillation amplitude compared to the average value, and K_c is the dimensionless frequency. The angle of attack also changes as a sinusoidal relationship with respect to time.

*Manuscript received: September 18, 2022. Revised October 29, 2022, Accepted, November 26, 2022.

[1]. PhD Candidate, Mechanical Engineering Department, Birjand University, Birjand, Iran

[2]. Corresponding author. Associated Professor, Mechanical Engineering Department, Birjand University, Birjand, Iran.

Email: mmjafarian@birjand.ac.ir

Governing equations, boundary conditions, and grid generation

Euler equations were used to model the inviscid flow mathematically. Euler equations are discretized in the curvilinear coordinates by the finite volume method (central difference scheme). The artificial dissipation scheme is also used to prevent oscillation near the shock waves. To solve the system of equations, the explicitly modified Runge-Kutta method of five stages is used, and the Fortran programming language is also used for coding. The conditions of the free stream for the inlet boundary and the extrapolation of the values of the flow variables at the outlet boundary were used. Moreover, for velocity, the slip condition on the solid wall was applied. The density change rate in the direction perpendicular to the wall is equal to zero, and the pressure is also obtained from the normal momentum equation on the wall. A structured O-grid was used for the numerical analysis which is shown in Figure 1.

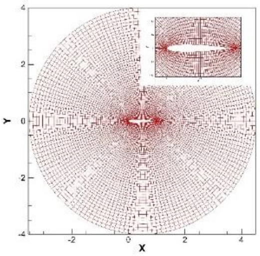


Figure 1. Computational grid around the airfoil

4. Results and discussion

Pressure coefficient distribution on the airfoil surface

The numerical results obtained by applying the adaptive time spectral method were compared with the experimental results for three cases (Case 1, Case 2, and Case 5), and a good agreement was observed, which indicates the accuracy of the adaptive time spectral method. Figure 2 shows the comparison of pressure coefficient distribution obtained from adaptive and non-adaptive time spectral methods with experimental results for Case 1 with 10-time intervals and an angle of attack of 5.18 degrees downward.

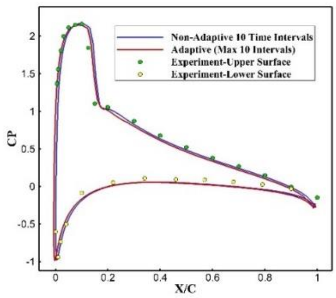


Figure 2. The comparison of the pressure coefficient on the airfoil surface obtained from adaptive and non-adaptive time spectral methods with experimental results in Case 1

Computer memory parameter

Comparing the amount of allocated memory in Case 2 and Case 5 with 4-time intervals showed that the computer memory in the adaptive time spectral method decreased 39% and 41%, respectively, compared to the non-adaptive time spectral method. Table 2 shows the percentage of computer memory decrease of the adaptive time spectral method compared to the non-adaptive time spectral method in Case 1. Figure 3 shows the distribution of time intervals for Case 1 with 10-time intervals. It is evident that the time intervals allocated in the region near the airfoil are more than the region far from the airfoil due to the impact of the body on the flow.

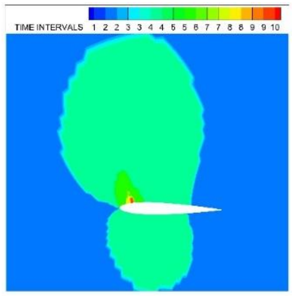


Figure 3. Contours of allocated time intervals in adaptive time spectral method for Case1 with 10-time intervals

Table 2. The percentage of computer memory decrease of the adaptive time spectral method compared to the non-adaptive time spectral method

4-time interval	8-time interval	10-time interval	12-time interval
%35	%72	%76	%81

CPU time parameter

The CPU time of the adaptive time spectral method decreases about 21% and 24%, respectively, compared to the non-adaptive time spectral method with 4-time intervals for Case 2 and Case 5. The CPU time also decreases for Case 1, according to Table 3.

Table 3. The CPU time reduction percentage of the adaptive time spectral method compared to the non-adaptive time spectral method

4-time interval	8-time interval	10-time interval	12-time interval
%16	%38	%31	%29

5. Conclusion

This study simulated the Euler equations around a NACA0012 pitching airfoil using the adaptive time-spectral method. Numerical results related to the pressure coefficient obtained from the adaptive and non-adaptive time spectral methods for the NACA0012 pitching airfoil were validated. The contours of the optimal distribution of time intervals showed that the time intervals allocated in the regions near the airfoil are more than the regions far from the airfoil due to the presence of shock waves and the impact of the body on the flow. Investigating the amount of computer memory and CPU time showed that the two parameters effectively decreased in the adaptive time-spectral method compared to the non-adaptive time-spectral method. The results of this research showed that it is possible to simulate the time-periodic flow using the adaptive time spectral method, with acceptable accuracy and by spending appropriate computer memory and processing time. Accordingly, using this method in the analysis of actual flows with excessive time change rates can be very beneficial while maintaining the accuracy of the solution, by reducing the amount of computer memory and CPU time.

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

به کارگیری روش طیفی زمانی تطبیقی برای تحلیل جریان تراکم‌پذیر غیرلزج حول یک ایرفویل نوسان‌کننده پیچشی*

مقاله پژوهشی

صمد قاسمی (۱)   سید مجید ملک جعفریان (۲)

DOI: 10.22067/jacsm.2022.78842.1138

چکیده *برای یک مسئله متناوب زمانمند مانند جریان حول ایرفویل نوسان‌کننده پیچشی می‌توان از روش طیفی زمانی که یک روش طیفی بر مبنای سری فوریه با سرعت همگرایی مناسب می‌باشد، بهره جست. عیب روش طیفی زمانی این است که در کل ناحیه محاسباتی تعداد فواصل زمانی در یک دوره تناوب ثابت بوده که این مسئله به نحو غیرضروری باعث بالا رفتن میزان حافظه کامپیوتری و زمان پردازش (متغیرهای وابسته) می‌شود. با استفاده از روش طیفی زمانی تطبیقی می‌توان با توزیع بهینه نقاط زمانی (متغیر مستقل) در ناحیه محاسباتی - به تناسب نرخ زمانمند بودن جریان - این ضعف روش طیفی زمانی را از بین برد. در تحقیق حاضر روش طیفی زمانی تطبیقی به یک حلگر جریان غیرلزج اضافه گردید. نتایج حاصل از این روش با نتایج روش طیفی زمانی استاندارد (غیرتطبیقی) و داده‌های تجربی مقایسه گردید. همچنین دو مؤلفه حافظه کامپیوتری و زمان پردازش مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصله برای سه حالت Case1، Case2 و Case5 به ترتیب با اعداد ماخ 0.6، 0.6 و 0.755 ایرفویل نوسان‌کننده NACA0012 نشان داد که ضمن داشتن دقت قابل قبول حل، میزان حافظه کامپیوتری نسبت به روش طیفی زمانی استاندارد، به نحو قابل توجهی کاهش می‌یابد. زمان پردازش کامپیوتری نیز برای Case2 و Case5 برای ٤ فاصله زمانی به ترتیب به میزان ۲۱ و ۲٤ درصد و برای Case1 در چهار وضعیت ٤، ۸، ۱۰ و ۱۲ فاصله زمانی به ترتیب به اندازه ۱٦، ۳۸، ۳۱ و ۲۹ درصد کاهش یافته است.*

واژه‌های کلیدی جریان متناوب زمانی، روش طیفی زمانی، روش طیفی زمانی تطبیقی، جریان تراکم‌پذیر غیرلزج، ایرفویل نوسان‌کننده.

Application of Adaptive Time Spectral Method to Analyze Inviscid Compressible Flow Around a Pitching Airfoil

Samad Ghasemi   Seyyed Majid Malek Jafarian

Abstract *a pitching airfoil, the time-spectral method can be used, which is a Fourier series-based spectral method with a suitable convergence speed. The disadvantage of the time spectral method is that in the entire computational domain, the number of time intervals is constant, which unnecessarily increasing the amount of computer memory and CPU time (The dependent variables). By using the adaptive time spectral method, this weakness of the time spectral method can be eliminated by the optimal distribution of time intervals (independent variable) in the computational domain (proportional to the flow gradient). In the present research, the adaptive time spectral method was added to an inviscid flow solver. The results of this method were compared with the results of the standard (non-adaptive) time spectral method and experimental data. Also, two components of computer memory and CPU time were studied. The results obtained for the three cases (Case1, Case2, and Case5) with Mach numbers 0.6, 0.6, and 0.755 respectively of the NACA0012 pitching airfoil showed that while having an acceptable solution accuracy, the amount of computer memory and CPU time is significantly reduced compared to the standard time spectral method. The CPU time for Case2 and Case5 for 4-time intervals has been reduced by 21 and 24 percent, respectively. And for Case1 for 4, 8, 1,0 and 12-time intervals, it has been reduced by 16, 38, ,31 and 29 percent respectively.*

Keywords Time Periodic Flow, Time Spectral Method, Adaptive Time Spectral Method, Inviscid Compressible Flow, Pitching Airfoil

تاریخ دریافت مقاله ۱٤۰۱/٦/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۱٤۰۱/۹/۲۰ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

(۲) نویسنده مسئول، دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، گروه تبدیل انرژی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

Email: mmjafarian@birjand.ac.ir

مقدمه

بسیاری از مسائل شامل جریان سیال، دارای ماهیت تناوبی می‌باشند. هنگامی که یک جسم، حرکت تناوبی را نسبت به زمان در میدان جریان انجام می‌دهد، الگوی ایجاد شده به صورت یک جریان متناوب زمانی می‌باشد. از این دست مسائل می‌توان به جریان حول روتورهای هلی‌کوپتر، جریان در توربوماشینها، جریان اطراف ایرفویل‌های نوسان‌کننده و تشکیل گردابه پشت اجسام نوک‌پهن اشاره کرد. جریان متناوب زمانی یکی از انواع جریانهای زمانمند می‌باشد. روش حل استاندارد این گونه مسائل، انتگرال‌گیری از معادلات حاکم و حل گام به گام در حوزه زمان تا حصول به حل پایدار می‌باشد. برای حل معادلات حاکم بر جریانهای زمانمند (با وجود نرخ تغییرات شدید) به صورت عددی نیاز به گامهای زمانی کوچک بوده که مستلزم استفاده از پردازنده‌های قوی می‌باشد. در جریان‌های متناوب زمانی می‌توان با بهره‌گیری از خاصیت تناوبی بودن و با استفاده از یک سیستم پردازش معمولی به حل قابل‌قبولی از معادلات حاکم دست یافت. به منظور استفاده از خاصیت تناوبی جریان، می‌توان جمله وابسته به زمان را در معادلات حاکم با استفاده از بسط سری فوریه گسسته نمود. با استفاده از این روش، معادلات حاکم زمانمند به مجموعه معادلات حالت دائم همبسته تبدیل شده به صورتی که مقدار حل نهایتاً به مقدار حل حالت دائم متناوب همگرا می‌شود. با این روش می‌توان بدون داشتن دوره گذار طولانی و با حل در چند دوره تناوب به جواب نهایی دست پیدا کرد. به روشهایی که با استفاده از خاصیت تناوبی مسائل متناوب زمانی به گسسته‌سازی جمله مشتق زمانی می‌پردازد اصطلاحاً روشهای طیفی گفته می‌شود. از جمله این روشها می‌توان به روشهای طیفی زمانی، توازن هارمونیک، روشهای حوزه فرکانس خطی و غیرخطی و روش فرکانس کاهش‌یافته اشاره کرد. روشهای طیفی اساساً در دو حوزه فرکانس و زمان دسته‌بندی می‌شوند.

هال و همکاران [1] روش توازن هارمونیک که یک روش طیفی غیرخطی در حوزه فرکانس می‌باشد را به منظور محاسبه راندمان در توربوماشینها ابداع نمودند. مورمان و فیلد [2] از روش فرکانس کاهش‌یافته در یک حلگر با شبکه کارتزین به منظور تحلیل جریان با وجود حرکت صلب استفاده نمودند. همان گونه که در بالا اشاره شد، از جمله روشهای طیفی برای حل مسائل متناوب، روش طیفی زمانی می‌باشد. روش طیفی زمانی که مبتنی بر تکرار معادلات گسسته شده در حوزه زمان می‌باشد در حوزه توربوماشینها، طراحی روتور و بال هلی‌کوپتر و آیروالاستیسیته مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است [3-5]. روشهای مختلفی جهت به دست آوردن روابط روش طیفی زمانی وجود داشته اما شاید ساده‌ترین آنها استفاده از روش توالی نقاط فوریه بر حسب زمان می‌باشد [4-8]. تلاشهایی را جهت تلفیق روشهای حل ضمنی و روش طیفی زمانی انجام دادند. لفل [9] با به کارگیری روش طیفی زمانی در یک حلگر با وجود حرکت نسبی به بررسی جریان حول ایرفویل نوسان‌کننده و روتور هلی‌کوپتر پرداخت. ژان و همکاران [10] یک روش طیفی زمانی مبتنی بر سری چبیشف (Chebyshev) را برای حل معادلات زمانمند عمومی شامل جریان‌های نوسانی و یا غیرنوسانی گسترش دادند. آنها این روش را به منظور به دست آوردن فرکانس تشکیل گردابه پشت یک استوانه ساکن به کار گرفتند. داید و ایکیچی [11] یک روش توزیع شبکه تطبیقی را برای حلگرهای جریان (که از روشهای طیفی زمانی و توازن هارمونیک استفاده می‌کردند) به کار گرفتند. پلانت و لاندری [12] روش طیفی زمانی را برای یک جریان گذرصوتی استفاده کردند. آنها بدین منظور جریان گذرصوتی حول ایرفویل OAT15A را مطالعه نموده و دریافتند که با استفاده از پنج مود فرکانسی می‌توان به نتایج با دقت قابل قبول دست یافت. هی [13] با استفاده از روش طیفی زمانی به بهینه‌سازی هندسی بال هواپیما جهت کمینه کردن نوسانهای با دامنه محدود (Limit Cycle Oscillation (LCO)) پرداخت. همان گونه که قبلاً ذکر شد در روشهای طیفی می‌توان با استفاده از خاصیت تناوبی و بسط تابع حل (متغیر جریان) بر حسب سری فوریه (با مجموعه‌ای از جملات هارمونیک) به همگرایی معادلات جریان سرعت بخشید. روشهای طیفی به صورت کلی در دو حوزه فرکانس و زمان تحلیل می‌شوند. جملات هارمونیک (Harmonic) در حوزه فرکانس موسوم به مودهای فرکانسی بوده و رابطه بین مودهای فرکانسی در حوزه فرکانس و تعداد نقاط زمانی (در یک دوره تناوب) در حوزه زمان به صورت رابطه $N = 2K + 1$ می‌باشد که در این رابطه K تعداد مودهای فرکانسی در حوزه فرکانس و N تعداد نقاط زمانی در حوزه زمان می‌باشند. از آنجا که در یک جریان زمانمند، شدت

زمانمندی در نقاط مختلف حوزه حل متفاوت می‌باشد لذا می‌توان به جای در نظر گرفتن تعداد مودهای فرکانسی (نقاط زمانی) ثابت برای کلیه نقاط شبکه از تعداد مودهای فرکانسی (نقاط زمانی) متغیر متناسب با نرخ تغییرات زمانی جریان در آن نقطه شبکه استفاده نمود. به نظر می‌رسد که انجام این بهینه‌سازی باعث کاهش حافظه کامپیوتری و همچنین کاهش زمان محاسباتی شود، که این فرضیه در ادامه بررسی خواهد شد. روشهای طیفی که از این تکنیک استفاده می‌کنند به روشهای طیفی تطبیقی موسوم می‌باشند. میپل [14] از روش توازن هارمونیک تطبیقی (Adaptive Harmonic Balance) (با بهره‌گیری از توزیع بهینه مودهای فرکانسی در حوزه فرکانس) برای تحلیل جریان‌های متناوب یک بعدی غیرخطی زمانمند استفاده نمود. میپل و همکاران [15] از روش توازن هارمونیک تطبیقی به حل معادله اویلر پرداختند. مصاحبی و ناداراجاه [16] از روش حوزه فرکانس غیرخطی تطبیقی (Adaptive Non-Linear Frequency Domain) (با بهره‌گیری از توزیع بهینه مودهای فرکانسی در حوزه فرکانس) برای تحلیل جریانهای لزج استفاده نمودند.

تحلیل جریانهای متناوب زمانی با استفاده از روش طیفی زمانی نسبت به روش گام‌زنی زمانی (Time marching) (به علت درگیر کردن کلیه نقاط زمانی در یک دوره تناوب) باعث افزایش دقت و سرعت همگرایی حل می‌شود. عیب این روش، حافظه بالای کامپیوتری مورد استفاده می‌باشد. با استفاده از روش طیفی زمانی تطبیقی و بهینه‌سازی توزیع نقاط زمانی در میدان جریان، می‌توان ضمن حفظ دقت روش طیفی زمانی استاندارد (غیرتطبیقی)، میزان حافظه کامپیوتری و زمان پردازش را به نحو مؤثری بهبود بخشید. بدین ترتیب می‌توان عیب روش طیفی زمانی استاندارد را برطرف نمود. مرور کارهای تحقیقاتی انجام شده که در بالا آمد نشان داد که در روش طیفی زمانی، تا به حال تحقیقی در زمینه کاهش حافظه کامپیوتری و زمان حل انجام نشده، بر همین اساس روش طیفی زمانی تطبیقی معرفی شده و بهینه‌سازی توزیع نقاط زمانی انجام شده است. در کار حاضر با به کارگیری یک حلگر (Solver) جریان، ابتدا با گسسته‌سازی جمله مشتق زمانی با استفاده از روش طیفی زمانی استاندارد به تحلیل جریان متناوب زمانی پرداخته شده سپس با کمک روش طیفی زمانی تطبیقی و بهینه‌سازی توزیع نقاط زمانی ارتقا یافته است. حلگر مذکور، جریان قابل تراکم غیرلزج حول یک ایرفویل NACA0012 که دارای حرکت تناوبی می‌باشد را با دو روش طیفی زمانی استاندارد (غیرتطبیقی) و تطبیقی تحلیل می‌کند. جملات مشتق مکانی با استفاده از روش حجم محدود (طرح تفاضل مرکزی) گسسته‌سازی شده است. با توجه به اینکه مسئله متناوب زمانی می‌باشد، جمله مشتق زمانی به کمک بسط سری فوریه و روش توالی نقاط فوریه گسسته‌سازی شده است. شبکه به کار گرفته شده نیز یک شبکه O منطبق بر مرز با حرکت صلب همراه جسم می‌باشد. نتایج عددی کار حاضر با نتایج آزمایشگاهی مؤسسه آگارد (AGARD) [17] اعتبارسنجی شده است.

روش‌ها

روش طیفی زمانی. به صورت کلی روشهای طیفی یا شبه طیفی برای مسائل وابسته به زمان به کار می‌روند. روش طیفی زمانی، ترکیبی از عملگر مشتق‌گیری زمانی با دقت طیفی و گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش تفاضل محدود، حجم محدود یا المان محدود با دقت جبری بوده که می‌تواند برای هندسه و میدان جریان‌های مختلف به کار گرفته شود. مشتق زمانی در هر نقطه زمانی را می‌توان با تعریف عملگر مشتق‌گیری میان‌یاب فوریه (Fourier interpolation derivative operator) به صورت ماتریسی زیر نوشت [18]:

$$\frac{d}{dt}u_N(X) = \mathcal{D}_N u_N(X) \qquad (۱)$$

عناصر ماتریس $\mathcal{D}_N$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathcal{D}_N = \frac{2\pi}{T}\sum_{j=0}^{N-1} \partial_{jn} u^j \qquad (۲)$$

∂_{jn} را می‌توان به ازای N های فرد به صورت زیر به دست آورد [19].

$$\partial_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{j-n}\csc\left(\frac{\pi(j-n)}{N}\right), & j \neq n \\ 0, & j = n \end{cases} \qquad (۳)$$

اعمال تکنیک تطبیقی در روش طیفی زمانی (توزیع بهینه فواصل زمانی). در روش طیفی زمانی و در جریانهای با نرخ تغییرات زمانی شدید (مانند ناحیه تشکیل موج ضربه‌ای) برای دستیابی به حل با دقت بالا باید از تعداد مودهای فرکانسی (نقاط زمانی) زیادی بهره برد که این موضوع باعث بالا رفتن میزان حافظه کامپیوتری مورد استفاده می‌شود. حافظه مورد نیاز به صورت خطی متناسب با تعداد مودهای فرکانسی مورد استفاده می‌باشد [20]. استفاده از مودهای فرکانسی زیاد در روش طیفی زمانی همچنین باعث کاهش نرخ همگرایی می‌شود. اگر در هر سلول محاسباتی تعداد مودهای فرکانسی مربوط به سری فوریه حل، متناسب با نرخ تغییرات زمانی در نظر گرفته شود می‌توان همگرایی و حافظه را بهبود بخشید. بدین معنی که در نواحی با شدت زمانمندی بیشتر، از تعداد مودهای فرکانسی بیشتر و در نواحی با نرخ تغییرات زمانی کمتر از مودهای فرکانسی کمتری استفاده کرد.

سهم هر مود در پاسخ، به مقدار دامنه موج آن مود وابسته می‌باشد. مقدار دامنه مربوط به هر مود ($\tilde{u}_k$) را می‌توان مطابق رابطه زیر به یک شاخص به نام دامنه موج بی‌بعد شده (Normalized Wave Amplitude (NWA)) تبدیل نمود.

$$\mathrm{NWA}_k = \frac{|\tilde{u}_k|}{\sum_{k=0}^{K}|\tilde{u}_k|} \qquad (٤)$$

که برای هر مود، مقدار دامنه موج طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$|\tilde{u}_k| = \sqrt{\Re\{\tilde{u}_k\}^2 + \Im\{\tilde{u}_k\}^2} = \sqrt{\tilde{u}_k\tilde{u}_{-k}} = \sqrt{\tilde{u}_k\bar{\tilde{u}}_k} \qquad (٥)$$

بر مبنای یک قاعده کلی با افزایش تعداد مودها (Modes) مقدار بزرگترین دامنه موج کاهش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان در هر سلول با مقایسه مقدار دامنه موج بی‌بعد شده با یک مقدار مرجع (Reference Normalized Wave Amplitude (RNWA)) به عنوان معیار، نسبت به تعیین تعداد مودهای سری فوریه مربوطه تصمیم‌گیری نمود. مقدار RNWA به نحوی در نظر گرفته می‌شود که کمترین مقدار بزرگترین دامنه موج را حفظ کند. فرایند افزایش تعداد مودهای سری فوریه به این صورت می‌باشد که ابتدا شرایط جریان آزاد به عنوان حل اولیه در نظر گرفته شده و به هر حجم کنترل در هر دوره تناوب یک مود فرکانسی (دو فاصله زمانی) تخصیص داده می‌شود. با تکرار معادلات گسسته شده و پیشروی حل، در صورتی که انرژی طیفی (Spectral Energy) (دامنه موج بی‌بعد شده) آخرین مود فرکانسی از مقدار انرژی طیفی مرجع (دامنه موج بی‌بعد شده مرجع) بزرگتر باشد، یک مود به حجم کنترل اضافه می‌شود. مقدار انرژی طیفی مرجع، معیار مشخصی نداشته و باید به نحوی تعیین شود که حداقل تعداد مودهای مورد نیاز هر سلول را حفظ کند. فرایند افزایش تعداد مودهای منتسب به هر حجم کنترل بعد از هر چندصد تکرار انجام می‌شود. جهت بهینه‌سازی توزیع مودهای فرکانسی (فواصل زمانی) در ناحیه محاسباتی، باید تعداد مودهای یک سلول را (که تعداد مود فرکانسی آن بیشتر از تعداد مورد نیاز می‌باشد) کاهش داد. در شروع فرایند تحلیل میدان جریان ممکن است که تعدادی از سلولهای محاسباتی به تعداد بیشتری مود نیاز داشته اما با پیشروی حل و پایدارتر شدن جریان، تعداد مودهای لازم برای دستیابی به همگرایی کاهش می‌یابد. الگوریتم بهینه‌سازی مودهای فرکانسی باید به نحوی باشد که تعداد مودهای این دسته از سلولها را کاهش دهد. به عبارت دیگر بهینه‌سازی باید به نحوی باشد که قادر به افزایش و یا کاهش تعداد مودهای تخصیصی به هر سلول باشد. برای کاهش تعداد مودهای فرکانسی ابتدا باید یک مود قبل از مود آخر را در نظر گرفته و اگر انرژی طیفی این مود کوچکتر از مقدار انرژی طیفی مرجع باشد، آخرین مود را حذف کرد.

با تخصیص تعداد مودهای متفاوت به سلولهای محاسباتی، نمی‌توان به سادگی شار عبوری از مرز مشترک دو سلول مجاور با تعداد مودهای متفاوت را محاسبه کرد و این موضوع چالش اصلی در اجرای روش طیفی زمانی تطبیقی می‌باشد. محاسبه شار عبوری در سلولهای مجاور با تعداد نقاط زمانی متفاوت نیازمند تکنیک ویژه‌ای است. به عنوان مثال اگر سلول سمت چپ (سلول ۱ در شکل ۱) دارای سه نقطه زمانی یا یک مود بوده ($K_L = 1$)، بنابراین حل در لحظات $t = 0, \frac{T}{3}, \frac{2T}{3}$ موجود بوده در حالی که در سلول سمت راست (سلول ۲ در شکل ۱) با پنج نقطه زمانی در هر دوره تناوب ($K_R = 2$) حل در لحظات $t = 0, \frac{T}{5}, \frac{2T}{5}, \frac{3T}{5}, \frac{4T}{5}$ موجود می‌باشد. جهت محاسبه

شار عبوری از وجه مشترک دو سلول فوق، به استثنای حل در لحظه $t = 0$ در سایر لحظات عدم انطباق زمانی وجود دارد. برای محاسبه شار عبوری از وجه سمت راست سلول سمت چپ باید بزرگترین مود را از سلول سمت راست حذف نماییم. با حذف بزرگترین مود از سلول سمت راست تعداد مودهای هر دو سلول با هم برابر شده ($K_R^* = K_L$) و به صورت زیر از یک تبدیل فوریه معکوس جهت محاسبه مقدار حل در سه نقطه زمانی جدید استفاده کرد [20].

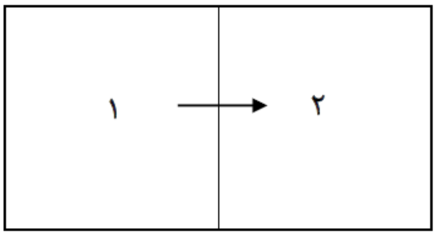
$$u_R^*(t) = \sum_{k=-K_R^*}^{K_R^*} \tilde{u}_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} \qquad (٦)$$

بنابراین با ترفند فوق می‌توان شارهای عبوری از وجه سمت راست سلول سمت چپ را محاسبه نمود. لازم به ذکر است که در روش فوق مقادیر حل به دست آمده از رابطه (٦) موقتی بوده و پس از محاسبه شار، آنها را حذف می‌نماییم. از یک استراتژی مشابه جهت محاسبه شار عبوری از وجه سمت چپ سلول سمت راست استفاده می‌نماییم. به نحوی که با اضافه کردن یک مود با ضرایب فوریه صفر به سلول سمت چپ تعداد مودهای دو سلول با هم برابر می‌شوند ($K_L^* = K_R$). مشابه حالت قبل با استفاده از یک تبدیل فوریه معکوس می‌توان حل را در حالت جدید با پنج نقطه زمانی به دست آورد.

$$u_L^*(t) = \sum_{k=-K_L^*}^{K_L^*} \tilde{u}_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} \qquad (٧)$$

بدین ترتیب شارهای عبوری از وجه سمت چپ سلول سمت راست در همه لحظات زمانی محاسبه می‌شوند. ضمن اینکه مقادیر حل به دست آمده از رابطه (٧) را پس از محاسبه مقادیر شار حذف می‌نماییم. بدین ترتیب می‌توان با استفاده از این روش جملات شار را در وجه مشترک سلولهای با تعداد گام زمانی متفاوت محاسبه نمود.

مدل هندسی. در این تحقیق جهت تحلیل جریان حول ایرفویل نوسان‌کننده از ایرفویل متقارن NACA0012 استفاده شده است. شرایط به کارگیری شده در این تحلیل در سه وضعیت Case1، Case2 و Case5 (مطابق با نام‌گذاری مؤسسه آگارد) در جدول (١) آورده شده است.



شکل ١ شار عبوری از وجه مشترک سلولهای ١ و ٢ با تعداد مودهای متفاوت

جدول ١ شرایط اعمال شده جهت شبیه‌سازی جریان حول ایرفویل نوسان‌کننده

AGARD Case Number	M_∞	α_m	α_0	K_c
Case1	0.6	2.89°	2.41°	0.0808
Case2	0.6	3.16°	4.59°	0.0811
Case5	0.755	0.016°	2.51°	0.0814

منظور از ایرفویل نوسان‌کننده، ایرفویلی است که با تغییر زاویه حمله نسبت به زمان (مطابق رابطه زیر) در یک دوره تناوب نوسان می‌کند:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t)$$

که در رابطه بالا، α_m متوسط زاویه حمله و α_0 ماکزیمم دامنه نوسان نسبت به مقدار متوسط و ω سرعت زاویه‌ای که به صورت جمله بدون بعد فرکانس کاهشی K_c به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K_c = \frac{\omega l_c}{2U_\infty}$$

در رابطه بالا، l_c طول مشخصه و U_∞ سرعت جریان آزاد می‌باشد.

معادلات حاکم، شرایط مرزی و تولید شبکه محاسباتی. جهت مدل‌سازی ریاضی جریان غیرلزج از معادله اویلر در مختصات منحنی‌الخط (ξ و η) استفاده شده است. این معادله به صورت رابطه (٨) می‌باشد:

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial \eta} = 0 \qquad (٨)$$

در معادله فوق $\hat{w}$ ، $\hat{f}$ و $\hat{g}$ به ترتیب بردار متغیرهای جریان و بردارهای شار غیرلزج در مختصات منحنی‌الخط بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{w} = J\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$\hat{f} = J\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho uU + \xi_x P\\ \rho vU + \xi_y P\\ (e + P)U - \xi_t P\end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

$$\hat{g} = J\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho uV + \eta_x P\\ \rho vV + \eta_y P\\ (e + P)V - \eta_t P\end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

که

$$U = u\xi_x + v\xi_y \quad , \quad V = u\eta_x + v\eta_y$$

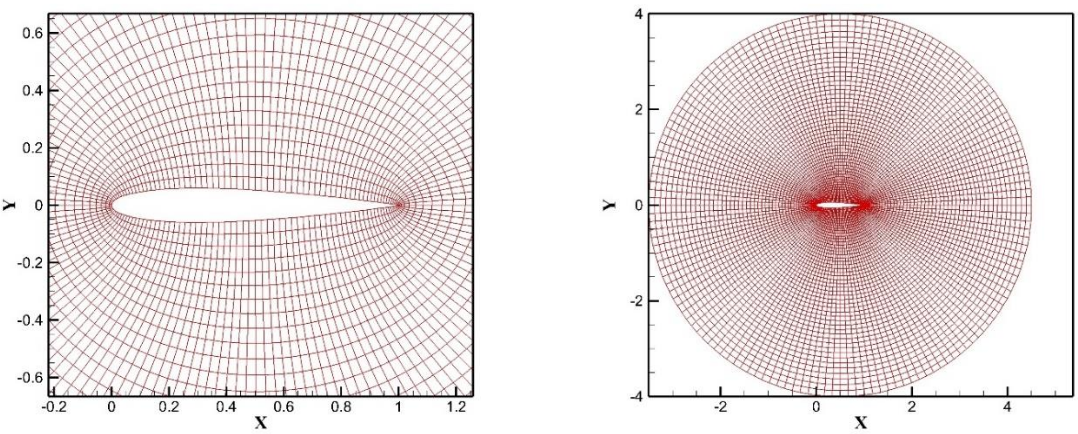
U و V مؤلفه‌های کانتراوارینت (Contravariant) سرعت می‌باشند.

معادله اویلر در مختصات منحنی‌الخط به روش حجم محدود (طرح تفاضل مرکزی) گسسته‌سازی شده و همچنین از طرح اتلاف مصنوعی به منظور جلوگیری از نوسانات در نزدیکی موج ضربه‌ای استفاده شده است. به منظور حل دستگاه معادلات، روش رانگ-کوتای (Runge-Kutta) صریح اصلاح شده پنج مرحله‌ای به کارگیری شده [21] و جهت کدنویسی نیز از زبان برنامه‌نویسی فرترن استفاده شده است. از شرایط جریان آزاد برای مرز ورودی و برون‌یابی مقادیر متغیرهای جریان در مرز خروجی و همچنین روی دیواره از شرط عدم نفوذ جریان و برابری مؤلفه مماسی سرعت با سرعت دیواره استفاده شده است. نرخ تغییرات دانسیته در جهت عمود بر دیواره نیز برابر با صفر و فشار نیز از معادله مومنتوم سطح به دست آمده است.

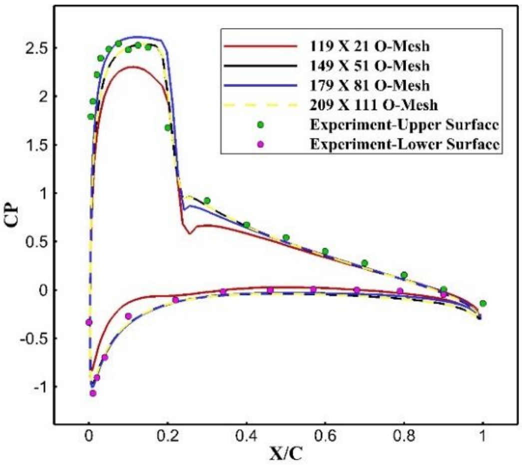
جهت تحلیل عددی میدان جریان از یک شبکه O سازمان یافته استفاده شده است. این شبکه، در شکل (۲) در دو نمای کلی (شکل ۲– الف) و نزدیک (شکل ۲–ب) نشان داده شده است.

برای بررسی عدم وابستگی حل به شبکه، مقادیر ضریب فشار با استفاده از روش طیفی زمانی غیرتطبیقی در چهار شبکه 21×119، 51×149، 81×179 و 111×209 برای Case2 و زاویه حمله بیشینه (۷/۷۵ درجه) و ٤ فاصله زمانی (۵ نقطه زمانی) در یک دوره تناوب مقایسه شده که در شکل (۳) نشان داده شده است. چون بیشینه زاویه حمله در سه حالت Case1، Case2 و Case5، ۷/۷۵ درجه می‌باشد و ریزش گردابه در زوایای حمله بزرگتر (حدود ۱۰ درجه به بالا) اتفاق می‌افتد، بنابراین در کار حاضر فرض جریان غیرلزج باعث ریزش گردابه نمی‌شود. اندکی تفاوت در نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی ناشی از غیرلزج بودن جریان می‌باشد.

با توجه به شکل (۳) و اختلاف نتایج شبکه 21×119 با مقادیر تجربی [17] و همچنین انطباق سه شبکه دیگر با نتایج تجربی، در ادامه از شبکه 51×149 (که دارای تعداد نقاط کمتری نسبت به دو شبکه دیگر بوده و ضمن داشتن دقت خوب، زمان حل مناسبی هم دارد) در میدان جریان استفاده شده است.



شکل ۲ شبکه محاسباتی O حول ایرفویل: (الف) نمای کلی و (ب) نمای نزدیک

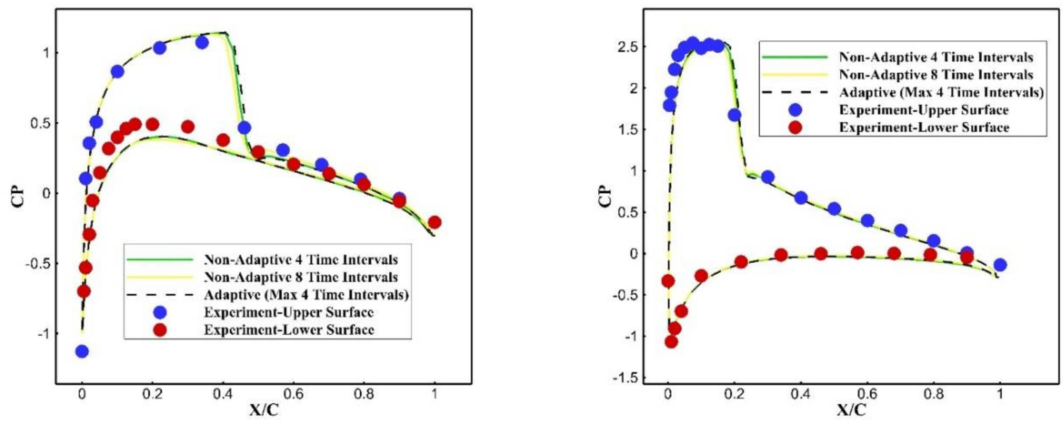


شکل ۳ نمودار مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی [17] مربوط به ضریب فشار برای چهار شبکه 119×21، 149×51، 179×81 و 209×111 برای Case2 در زاویه حمله ۷/۷۵ درجه

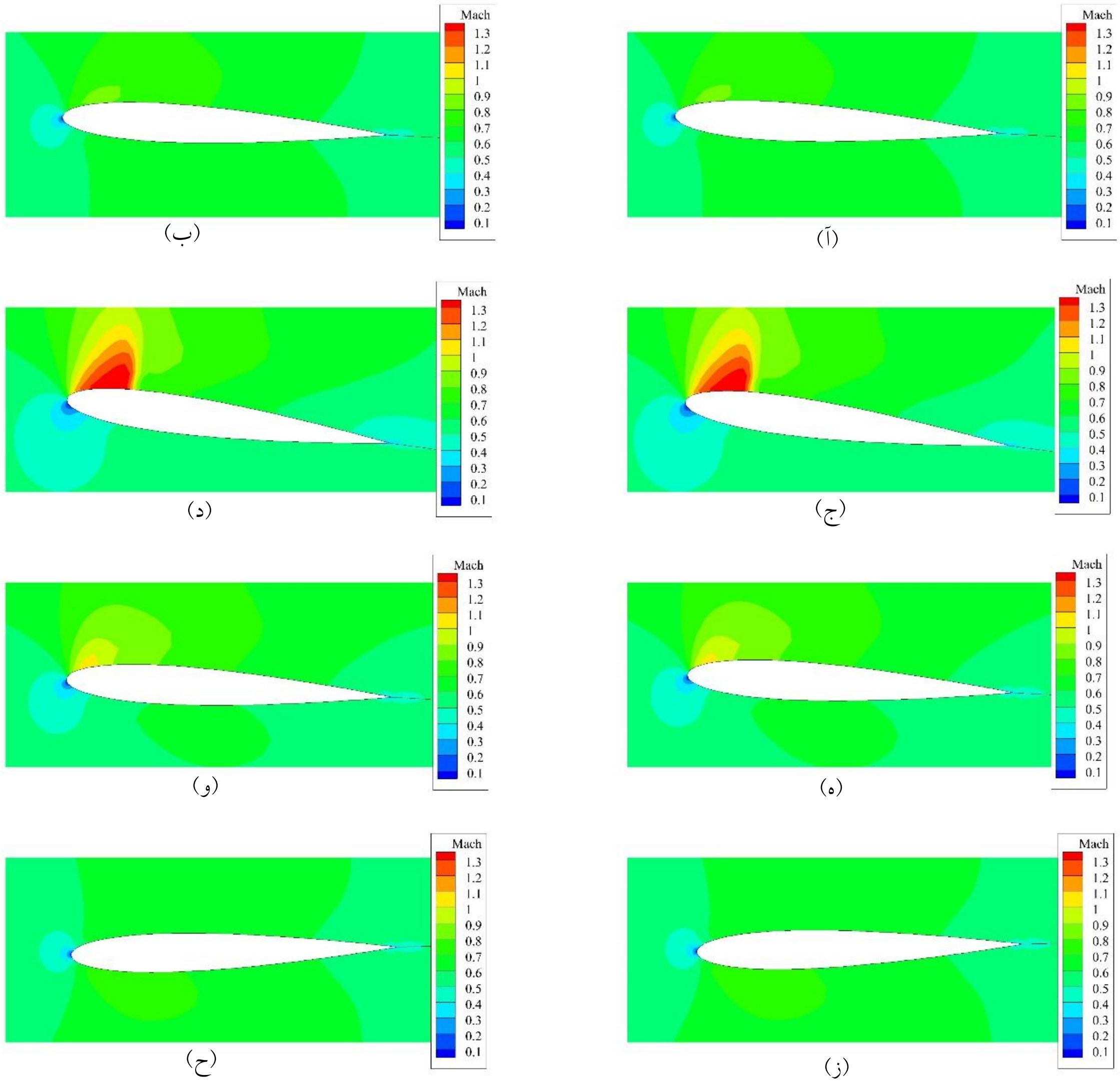
مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی

در این قسمت با اضافه کردن خاصیت تطبیقی به حلگر جریـان به مقایسه نتایج عددی حاصل از روشهای طیفی زمانی تطبیقی، غیرتطبیقی و نتایج آزمایشگاهی [17] پرداخته شده است.

روش طیفی زمانی تطبیقی. همان طور که در رابطه با روش طیفی زمانی تطبیقی توضیح داده شد، پیش‌بینی می‌شود که می‌توان با توزیع بهینه نقاط زمانی در میدان جریان ضمن حفظ دقت محاسباتی روش طیفی زمانی غیرتطبیقی، دو پارامتر حافظه کامپیوتری و زمان پردازش را کاهش داد. در این بخش نتایج حاصل از اجرای روش طیفی زمانی تطبیقی جهت یک ایرفویل نوسان‌کننده آورده شده است. در روش طیفی زمانی تطبیقی (Adaptive Time Spectral) تعداد نقاط زمانی به هر سلول در یک دوره تناوب به صورت بهینه بر اساس نرخ تغییرات زمانی جریان، تخصیص می‌یابد. در شکلهای (٤-الف و ٤-ب)، مقادیر ضریب فشار به ترتیب برای زاویه ۷/۷۵ درجه (بیشینه زاویه حمله Case2) و ۲/۵- درجه (کمینه زاویه حمله Case5) (که نتایج تجربی در این دو زاویه موجود بوده) حاصل از روشهای طیفی زمانی غیر تطبیقی با ٤ و ۸ فاصله زمانی در یک دوره تناوب و طیفی زمانی تطبیقی با حداکثر ٤ فاصله زمانی در یک دوره تناوب و نتایج آزمایشگاهی [17] مقایسه شده است. در این شکلها، در ناحیه‌ای از نمودار که مقدار ضریب فشار دچار افت ناگهانی شده، موج ضربه‌ای تشکیل شده است.



شکل ٤ صحت‌سنجی مقادیر ضریب فشار روی سطح ایرفویل حاصل از روش طیفی زمانی غیرتطبیقی با ٤ و ۸ فاصله زمانی در یک دوره تناوب و روش طیفی زمانی تطبیقی با حداکثر ٤ فاصله زمانی در یک دوره تناوب و نتایج تجربی [17]: الف) زاویه حمله ۷/۷۵ درجه Case2 ب) زاویه حمله ۲/۵- درجه Case5



شکل ۵ مقایسه خطوط همتراز عدد ماخ حاصل از روشهای طیفی زمانی غیرتطبیقی با ٤ فاصله زمانی در یک دوره تناوب و طیفی زمانی تطبیقی با حداکثر ٤ فاصله زمانی در یک دوره تناوب Case2 برای الف) زاویه حمله ۳/۱٦ درجه روبه بالا غیرتطبیقی، ب) زاویه حمله ۳/۱٦ درجه روبه بالا تطبیقی، ج) زاویه حمله ۷/۷۵ درجه غیرتطبیقی، د) زاویه حمله ۷/۷۵ درجه تطبیقی، ه) زاویه حمله ۳/۱٦ درجه رو به پایین غیرتطبیقی، و) زاویه حمله ۳/۱٦ درجه رو به پایین تطبیقی، ز) زاویه حمله ۱/٤۳- درجه غیرتطبیقی و ح) زاویه حمله ۱/٤۳- درجه تطبیقی

در شکل (۵)، خطوط همتراز عدد ماخ برای Case2 در چهار فاصله زمانی برای چهار زاویه حمله حاصل از روشهای طیفی زمانی غیرتطبیقی و تطبیقی مقایسه شده است. شکلهای (۵- الف، ۵-ج، ۵-ه، ۵-ز) با استفاده از روش طیفی زمانی غیرتطبیقی و شکلهای (۵- ب، ۵-د، ۵-و، ۵-ح) با استفاده از روش طیفی زمانی تطبیقی ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که بین شکلهای متناظر انطباق قابل قبولی وجود دارد. در همه شکلها در لبه حمله مقدار عدد ماخ کمینه شده که نشان‌دهنده وجود نقطه سکون می‌باشد. هنگامی که عدد ماخ جریان آزاد از مقدار عدد ماخ بحرانی بزرگتر شود، امکان تشکیل موج ضربه‌ای روی سطح بالا و پایین ایرفویل وجود دارد [22]. در این تحقیق عدد ماخ جریان آزاد برای تمامی ایرفویلها کمتر از یک بوده (جدول ۱) و در مواردی که از عدد ماخ بحرانی بزرگتر شود روی سطح بالا و یا پایین ایرفویل موج ضربه‌ای تشکیل می‌شود. از آنجایی که ایرفویل مورد بررسی در این تحقیق ساکن نبوده و دارای حرکت نوسانی می‌باشد و همچنین عدد ماخ بحرانی تابع عوامل گوناگونی از جمله زاویه حمله می‌باشد، لذا تشکیل موج ضربه‌ای بستگی به زاویه چرخش

ایرفویل دارد. در زوایای حمله ۷/۷۵ درجه و ۳/۱۶ درجه رو به پایین در ناحیه نزدیک به لبه حمله به ترتیب موج ضربه‌ای قوی و ضعیف تشکیل شده است. تشکیل موج ضربه‌ای در شکل‌های (۵-ج، ۵-د، ۵-ه، ۵-و) برای زوایای حمله ۷/۷۵ درجه و ۳/۱۶ درجه رو به پایین نشان داده شده است. همچنین از شکلهای (۵- الف، ۵-ب، ۵-ز، ۵-ح) مشخص است که موج ضربه‌ای تشکیل نشده است. در این بخش مقایسه نتایج عددی حاصل از روشهای طیفی زمانی تطبیقی، غیر تطبیقی و نتایج تجربی نشان داد که روش طیفی زمانی تطبیقی با دقت قابل قبولی جریان را مدل می‌کند. حال این موضوع بررسی می‌شود که آیا می‌توان به جای توزیع یکنواخت نقاط زمانی در کل میدان جریان، با توزیع بهینه نقاط زمانی متناسب با نرخ تغییرات زمانی هر سلول، میزان حافظه کامپیوتری و زمان پردازش را کاهش داد یا خیر. به عبارت دیگر، پیش‌بینی می‌شود که می‌توان با به کارگیری روش طیفی زمانی تطبیقی برای تحلیل جریان متناوب زمانی (جریان حول ایرفویل نوسان‌کننده) - با استفاده از تعداد فاصله زمانی کمتر در یک دوره تناوب- ضمن حفظ دقت محاسباتی روش طیفی زمانی غیرتطبیقی، میزان حافظه کامپیوتری را کاهش داده و سرعت همگرایی را افزایش داد که این موضوع در ادامه مورد بررسی قرار گرفته است.

صرفه‌جویی در حافظه کامپیوتری و زمان پردازش. در شکل (٤) نشان داده شد که در دو حالت Case2 و Case5 نتایج عددی حاصل از توزیع بهینه تعداد فاصله زمانی با حداکثر ٤ فاصله زمانی تخصیص یافته به هر سلول در یک دوره تناوب با نتایج عددی حاصل از توزیع یکنواخت (تخصیص ٤ فاصله زمانی به هر سلول در یک دوره تناوب) و همچنین نتایج تجربی منطبق است. به عبارت ساده‌تر در تحلیل جریان تراکم‌پذیر حول ایرفویل نوسان‌کننده می‌توان به جای تخصیص ٤ فاصله زمانی به هر سلول، تنها تعدادی از سلولهای محاسباتی را با ٤ فاصله زمانی تحلیل کرد و معادلات جریان در مابقی سلولها را با تعداد فاصله زمانی کمتر حل نمود که این موضوع باعث افزایش سرعت همگرایی و کاهش حافظه کامپیوتری مورد نیاز می‌شود. حال به بررسی میزان حافظه کامپیوتری مورد استفاده و همچنین زمان پردازش در روش تطبیقی پرداخته خواهد شد. همان گونه که قبلاً در رابطه با (توزیع انطباقی نقاط زمانی) ذکر شد، جهت توزیع بهینه فواصل زمانی در ناحیه محاسباتی باید دامنه هر موج با مقدار مرجع مقایسه گردد. از آنجا که جهت محاسبه دامنه موج باید مقدار میانگین زمانی حاصل‌ضرب متغیر جریان در تابع نمایی در یک دوره تناوب محاسبه شود، بنابراین فرایند توزیع بهینه فواصل زمانی جهت یک دوره تناوب امکان‌پذیر می‌باشد.

شبکه محاسباتی در نظر گرفته شده شامل ۷۸۰۰ سلول محاسباتی بوده که برای هر سلول در حالت غیرتطبیقی ٤ فاصله زمانی در نظر گرفته شده است. توزیع تعداد فاصله زمانی در حالت طیفی زمانی تطبیقی مطابق جدول (۲) می‌باشد.

جدول ۲ توزیع تعداد فاصله زمانی در ناحیه محاسباتی برای حالات Case2 و Case5

تعداد فاصله زمانی	تعداد سلول	حالت
۲	٦۰۹۱	Case2
٤	۱۷۰۹	
۲	٦۳٦۸	Case5
٤	۱٤۳۲	

حال جهت مقایسه میزان حافظه کامپیوتری مصرفی در حالات غیرتطبیقی و تطبیقی، ابتدا حاصل‌ضرب تعداد سلولها در تعداد فاصله زمانی را حساب کرده، سپس به محاسبه نسبت آنها خواهیم پرداخت.

در حالت طیفی زمانی غیرتطبیقی (توزیع ٤ فاصله زمانی به صورت یکنواخت در کل ناحیه محاسباتی):

$$7800 \times 4 = 31200 \qquad (۱۲)$$

حالت طیفی زمانی تطبیقی (توزیع بهینه تعداد فاصله زمانی با حداکثر ٤ فاصله زمانی تخصیص یافته به هر سلول):

- Case2

$$(6091 \times 2) + (1709 \times 4) = 19018 \qquad (۱۳)$$

با تقسیم نمودن رابطه (۱۳) بر رابطه (۱۲) داریم:

$$\frac{19018}{31200} = 0.61 \qquad (۱٤)$$

- Case5

$$(6368 \times 2) + (1432 \times 4) = 18464 \qquad (۱۵)$$

با تقسیم نمودن رابطه (۱۵) بر رابطه (۱۲) داریم:

$$\frac{18464}{31200} = 0.59 \qquad (۱٦)$$

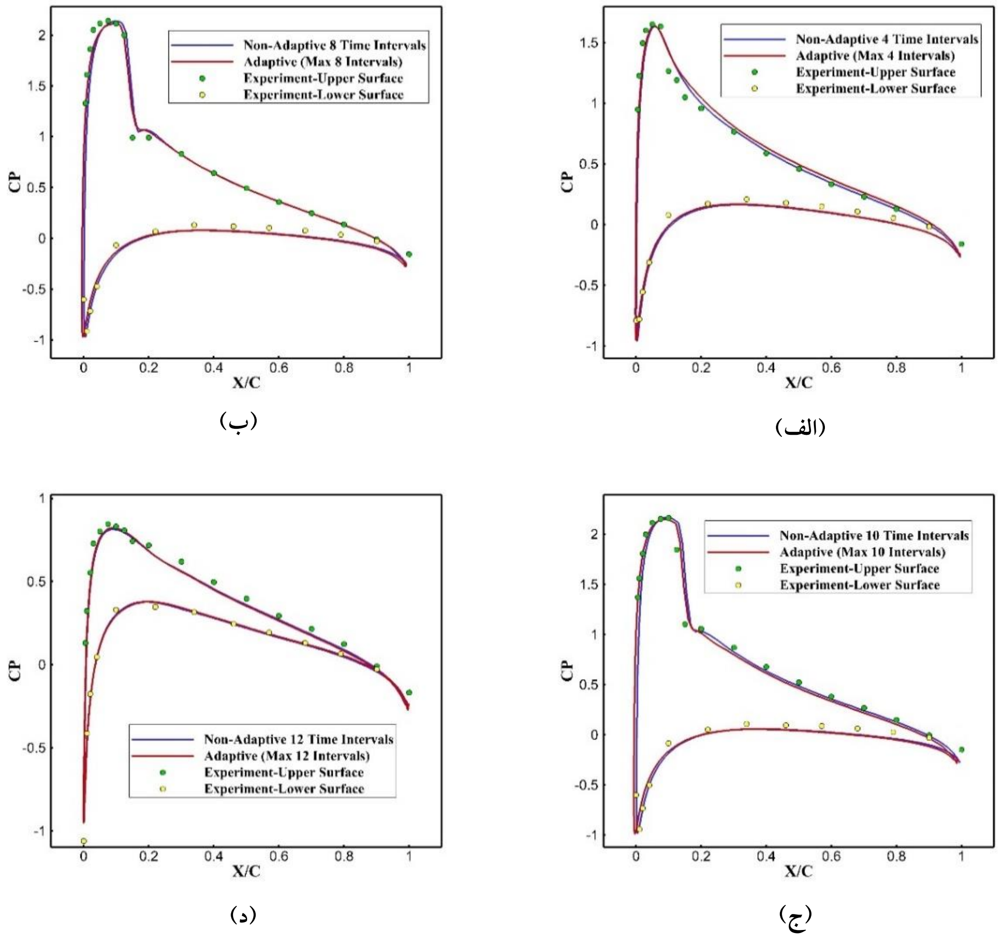
از روابط (۱٤ و ۱٦) بدیهی است که در دو حالت Case2 و Case5 به ترتیب به میزان ۳۹ و ٤۱ درصد در حافظه کامپیوتری صرفه‌جویی شده است.

جهت مقایسه زمان پردازش کامپیوتری دو روش طیفی زمانی غیرتطبیقی و طیفی زمانی تطبیقی، زمان اجرای کد محاسباتی برای روش غیرتطبیقی برای ٤ فاصله زمانی و روش تطبیقی با حداکثر ٤ فاصله زمانی برای دو حالت Case2 و Case5 در جدول (۳) آورده شده است.

جدول ۳ زمان پردازش کامپیوتری در دو روش طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی

	طیفی زمانی غیرتطبیقی با ٤ فاصله زمانی (ثانیه)	طیفی زمانی تطبیقی با حداکثر ٤ فاصله زمانی (ثانیه)
Case2	۳٤۲	۲۷۱
Case5	٤٥٦	۳٤۹

از جدول (۳) مشخص است که زمان پردازش کامپیوتری در روش طیفی زمانی تطبیقی نسبت به روش غیرتطبیقی در دو حالت Case2 و Case5 به ترتیب به میزان ۲۱ و ۲٤ درصد کاهش می‌یابد.

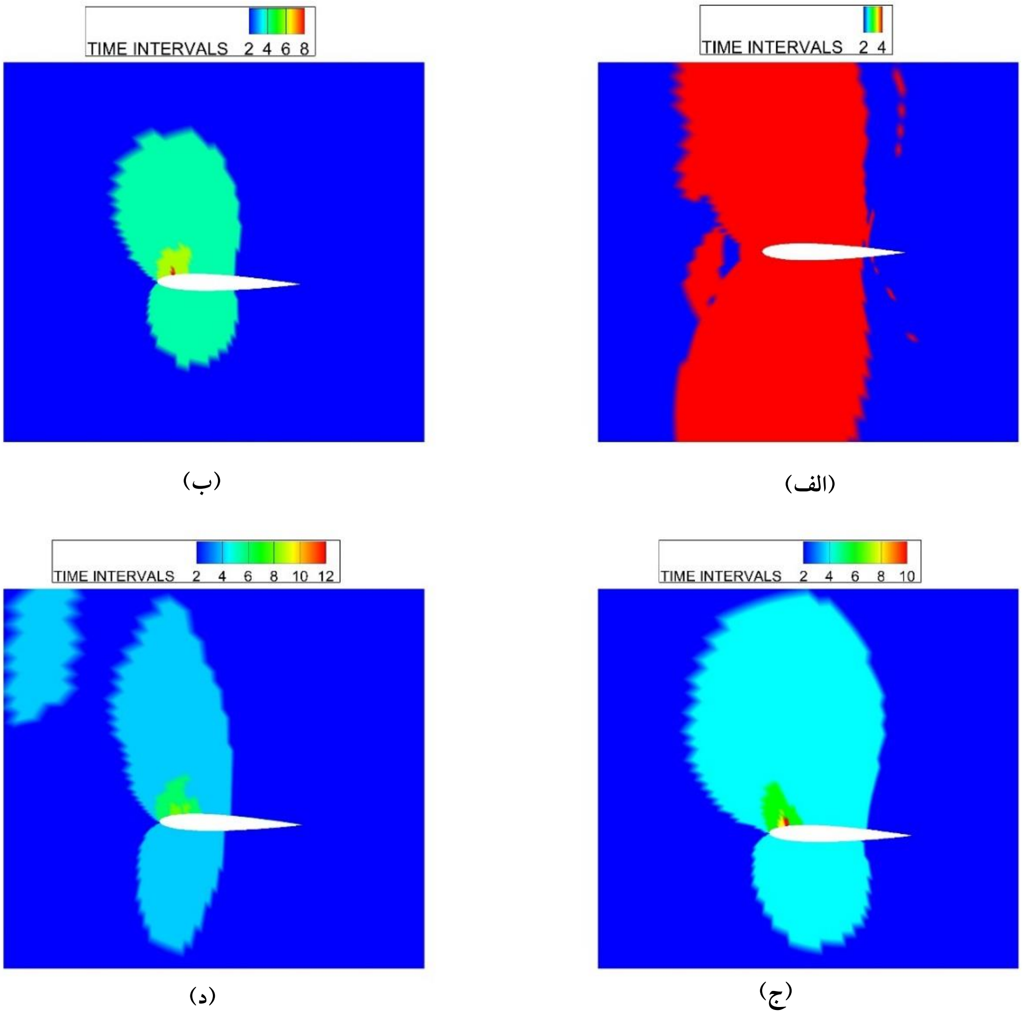


شکل ٦ (آ، ب، ج، د) – مقایسه ضریب فشار روی سطح ایرفویل حاصل از روش‌های طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی با نتایج تجربی در حالت Case1 برای (آ) زاویه حمله ۲/۸۹ درجه رو به پایین با ٤ فاصله زمانی (ب) زاویه حمله ٤/۵۹ درجه رو به پایین با ۸ فاصله زمانی (ج) زاویه حمله ۵/۱۸ درجه رو به پایین با ۱۰ فاصله زمانی (د) زاویه حمله ۱/٦۹ درجه رو به بالا با ۱۲ فاصله زمانی

در ادامه برای بررسی بیشتر دو پارامتر حافظه کامپیوتری و سرعت همگرایی در روش طیفی زمانی تطبیقی، به مقایسه دو روش طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی در چهار وضعیت ٤، ٨، ١٠ و ١٢ فاصله زمانی در حالت Case1 پرداخته می‌شود.

شکل (٦) مقدار ضریب فشار را روی سطح ایرفویل در حالت Case1 و در چهار وضعیت ٤، ٨، ١٠ و ١٢ فاصله زمانی به ترتیب برای زوایای حمله ٢/٨٩ درجه رو به پایین، ٤/٥٩ درجه رو به پایین، ٥/١٨ درجه رو به پایین و ١/٦٩ درجه رو به بالا نشان می‌دهد. در این شکل مقادیر ضریب فشار حاصل از روشهای طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی و همچنین نتایج تجربی مقایسه شده است. از شکل (٦) بدیهی است که نتایج حاصل از روش طیفی زمانی تطبیقی دارای دقت مناسبی بوده و با افزایش تعداد فاصله زمانی نیز خللی در نتایج روش تطبیقی ایجاد نمی‌شود. افت ناگهانی ضریب فشار در شکل‌های (٦ –ب) و (٦– ج) نشان‌دهنده تشکیل موج ضربه‌ای می‌باشد.

در شکل (٧) خطوط هم‌تراز فواصل زمانی برای حالت Case1 در چهار وضعیت متناظر با نمودارهای شکل (٦) نشان داده شده است. همان گونه که انتظار می‌رود در نواحی با نرخ تغییرات زمانی بیشتر (مانند ناحیه نزدیک به ایرفویل و محل تشکیل موج ضربه‌ای) تعداد فواصل زمانی بیشتری تخصیص یافته و در نواحی دور از ایرفویل به علت نرخ تغییرات زمانی کمتر، تعداد فواصل زمانی کمتری به کار گرفته شده است. توزیع سلول‌های محاسباتی متناظر با تعداد فواصل زمانی در روش طیفی زمانی تطبیقی متناظر با شکل (٧) به صورت کمی در جدول (٤) نشان داده شده است.



شکل ٧ خطوط همتراز فواصل زمانی در روش طیفی زمانی تطبیقی برای حالت Case1 برای الف) ٤ فاصله زمانی، ب) ٨ فاصله زمانی، ج) ١٠ فاصله زمانی و د) ١٢ فاصله زمانی

جدول ٤ توزیع سلولها در ناحیه محاسباتی در روش طیفی زمانی تطبیقی برای چهار وضعیت ٤، ۸، ۱۰ و ۱۲ فاصله زمانی Case1

تعداد فاصله زمانی						حداکثر فاصله زمانی در روش تطبیقی
۱۲	۱۰	۸	٦	٤	۲	
–	–	–	–	۲۳۵۹	٥٤٤۱	٤
–	–	٥	۱۰٤	۸٤۹	٦۸٤۲	۸
–	٦	۱۳	۱۲٥	۱۳٦۱	٦۲۹٥	۱۰
–	–	۲٦	۱۲٤	۹٥۸	٦٦۹۲	۱۲

از جدول (٤) ملاحظه می‌شود که در همه حـالات، بخـش اعظم سلولهای محاسباتی شامل ۲ فاصله زمانی بوده کـه باعـث صرفه‌جویی قابل‌توجهی در حافظه کامپیوتری می‌گـردد. درصـد کاهش حافظه کامپیوتری ناشی از توزیع بهینه فواصل زمـانی در یک دوره تناوب متناظر با جدول (٤) در جدول (٥) ارائـه شـده است.

جدول ٥ درصد کاهش حافظه کامپیوتری روش طیفی زمانی تطبیقی نسبت به روش طیفی زمانی غیرتطبیقی

۱۲ فاصله زمانی	۱۰ فاصله زمانی	۸ فاصله زمانی	٤ فاصله زمانی
۸۱	۷٦	۷۲	۳٥

جدول ٦ مقایسه زمان پردازش کامپیوتری دو روش طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی

روش طیفی زمانی تطبیقی (ثانیه)	روش طیفی زمانی غیرتطبیقی (ثانیه)	تعداد فاصله زمانی
۲٦۱	۳۰۹	٤
۳۹۱	٦۳٦	۸
٥٦۸	۸۲۹	۱۰
٦۹٤	۹۸٥	۱۲

توضیح اینکـه مقـادیر جـدول (٥) مشـابه بـا روش مـورد استفاده برای ٤ فاصله زمانی در دو حالـت Case2 و Case5 کـه در ابتدای این بخش و با استفاده از مقادیر جدول (٤) به دسـت آمده است. از جدول (٥) بدیهی است که حافظه کـامپیوتری در روش طیفی زمانی تطبیقی با حداکثر ۱۲ فاصله زمانی بـه میـزان ۸۱٪ نسبت به روش طیفی زمانی غیرتطبیقی با ۱۲ فاصله زمانی کاهش می‌یابد. حال جهـت بررسـی سـرعت همگرایـی، زمـان پردازش برای دو روش طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی بـرای ٤ حالت متناظر با جدول (٤) در قالـب جـدول (٦) ارائـه شـده است.

از مقادیر جدول (٦) ملاحظه می‌شـود کـه زمـان پـردازش کامپیوتری در روش طیفی زمانی تطبیقی نسبت به روش طیفـی زمانی غیرتطبیقی کاهش یافتـه اسـت. جهـت درک بهتـر میـزان کاهش زمـان پـردازش و افـزایش سـرعت همگرایـی در روش تطبیقی نسبت به روش غیرتطبیقی، درصد کاهش زمان پردازش به صورت جدول (۷) نشان داده شده است.

جدول ۷ درصد کاهش زمان پردازش روش طیفی زمانی تطبیقی نسبت به روش طیفی زمانی غیرتطبیقی

۱۲ فاصله زمانی	۱۰ فاصله زمانی	۸ فاصله زمانی	٤ فاصله زمانی
۲۹	۳۱	۳۸	۱٦

از جـدول (۷) مشـاهده مـی‌شـود کـه بـه اسـتثنای حالـت ٤ فاصله زمانی، با افزایش تعداد فاصله زمـانی، درصـد کـاهش زمان پردازش روش طیفی زمانی تطبیقی نسبت به روش طیفـی زمانی غیرتطبیقـی کـاهش یافتـه کـه بـه علـت افـزایش حجـم محاسباتی به دلیل ناهماهنگی در تعداد فواصل زمانی سـلولهای مجاور می‌باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

یکی از روشهای حل مسائل متناوب زمانی، روش طیفی زمـانی بوده که با استفاده از بسـط سـری فوریـه، جملـه مشـتق زمـانی معادلات جریان را گسسته می‌نماید. هر دوره تناوب زمـانی بـه وسیله فواصل زمانی همسان به چند قسمت تقسیم می‌شـود. در روش طیفی زمانی غیرتطبیقی (استاندارد)، فواصل زمانی مربوط به یک دوره تناوب برای کلیه ناحیه محاسباتی یکسان بـوده کـه این موضوع باعث می‌شود زمان پردازش و حافظه کامپیوتری در نواحی که نرخ تغییرات زمانی جریان کم می‌باشد همانند نواحی با نرخ تغییرات زمانی شدید، به نحو غیرضـروری بـالا رود. بـه عبارت دیگر، در یک دوره تناوب زمانی، از تعداد فواصل زمانی یکسان برای نواحی با نرخ زمانمندی متفاوت استفاده مـی‌شـود. حال آنکه لزومی ندارد در نواحی دور از جسم که نرخ تغییرات زمانی جریان کم می‌باشد از فاصله زمانی کوچک اسـتفاده کـرد. این موضوع نقطه ضعف روش طیفی زمانی غیرتطبیقی می‌باشـد که می‌تـوان بـا توزیـع بهینـه فواصـل زمـانی متناسب بـا نـرخ

زمانمندی جریان این نقیصه را رفع نمود. بـا اسـتفاده از توزیـع بهینه فواصل زمانی در یـک دوره تنـاوب، روش طیفـی زمـانی ضمن حفظ دقت محاسباتی، میزان حافظـه کـامپیوتری و زمـان پردازش به نحو مؤثری کاهش می‌یابـد. روش طیفـی زمـانی بـا توزیع بهینه فواصل زمانی بـه نـام روش طیفـی زمـانی تطبیقـی نام‌گذاری شده است. در کار حاضر معادلات اویلـر حـول یـک ایرفویل نوسان‌کننـده NACA0012 بـا اسـتفاده از روش طیفـی زمانی تطبیقی تحلیل شده است. نتـایج حاصـله بـه شـرح ذیـل می‌باشد:

۱) مقایسه نتایج عددی حاصل از روش طیفی زمانی تطبیقی بـا نتـایج روش طیفـی زمـانی غیرتطبیقـی و همچنـین نتـایج تجربی برای سه حالت ایرفویل نوسان‌کننـده NACA0012 (Case1، Case2 و Case5) نشان داد که نتایج روش طیفـی زمانی تطبیقی با دقت قابـل قبـولی بـا نتـایج روش طیفـی زمانی غیرتطبیقی و همچنین نتایج تجربی منطبق مـی‌باشـد، که مؤید این مطلب است کـه روش طیفـی زمـانی تطبیقـی به‌خوبی جریان متناوب زمانی را مدل می‌کند.

۲) رسم نمودار خطوط همتراز توزیع بهینه فواصل زمانی در حالت Case1 نشان داد که تعداد فاصله زمانی تخصیص‌یافته در نواحی نزدیک به ایرفویل به علت تشکیل موج ضربه‌ای و اثر جسم روی جریان، بیشتر از نواحی دور از ایرفویل می‌باشد.

۳) بررسی میزان حافظه و زمان پردازش کامپیوتری در روش‌های طیفی زمانی تطبیقی و غیرتطبیقی نشان داد که دو پارامتر مذکور، در روش طیفی زمانی تطبیقی به نحو مؤثری نسبت به روش طیفی زمانی غیرتطبیقی کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان با استفاده از روش طیفی زمانی تطبیقی، با دقت قابل قبول و با صرف حافظه کامپیوتری و زمان پردازش مناسبی، جریان متناوب زمانی را تحلیل نمود. بنابراین به کارگیری این روش در تحلیل جریان‌های واقعی با نرخ تغییرات زمانی شدید می‌تواند ضمن حفظ دقت حل، با کاهش میزان حافظه و زمان پردازش کامپیوتری، بسیار سودمند باشد.

فهرست علائم اختصاری

زمان واقعی	t
فرکانس پایه	ω
مختصه شبکه در فضای فیزیکی	x
وتر ایرفویل	C
فرکانس کاهشی	K_c
عدد ماخ جریان آزاد	M_∞
ضریب فشار	C_p
ضرایب سری فوریه به صورت گسسته	$\tilde{u}_k$
قسمت موهومی دامنه موج	$\mathfrak{I}$
بردار شار جابه جایی در راستای ξ در فضای محاسباتی	$\hat{f}$
مختصه هم‌راستای جریان در فضای محاسباتی	ξ
بردار متغیرهای جریان در مختصات منحنی‌الخط	$\hat{w}$
ماتریس ژاکوبین	J
چگالی	ρ
عملگر مشتق‌گیری در حوزه زمان	$\mathcal{D}_N$
مقادیر حل به صورت گسسته	u_N
مؤلفه‌های کانتراوارینت سرعت	U,V
تعداد نقاط زمانی در یک دوره تناوب	N
تعداد مودهای فرکانسی، $K = (N-1)/2$	K
عدد ماخ	M
فشار	P
دوره تناوب	T
طول مشخصه	l_c
سرعت جریان آزاد	U_∞
قسمت حقیقی دامنه موج	$\mathfrak{R}$
بردار شار جابه جایی در راستای η در فضای محاسباتی	$\hat{g}$
مختصه عمود بر جسم در فضای محاسباتی	η
انرژی کل در واحد جرم	e
مؤلفه بردار سرعت سیال در جهت x	u
مؤلفه بردار سرعت سیال در جهت y	v

متوسط زاویه حمله	α_m
ماکزیمم دامنه نوسان نسبت به مقدار متوسط	α_0
مختصه شبکه در فضای فیزیکی	y
ضرایب ماتریس کالوکیشن فوریه	∂_{jn}

واژه‌نامه

چبیشف	Chebyshev
نوسان‌های با دامنه محدود	Limit Cycle Oscillations (LCO)
هارمونیک	Harmonic
توازن هارمونیک تطبیقی	Adaptive Harmonic Balance
حوزه فرکانس غیرخطی تطبیقی	Adaptive Non-Linear Frequency Domain
گام‌زنی زمانی	Time marching
حل‌گر	Solver
آگارد	AGARD
عملگر مشتق‌گیری میان‌یاب فوریه	Fourier interpolation derivative operator
دامنه موج بی‌بعد شده	Normalized Wave Amplitude (NWA)
مودها	Modes
دامنه موج بی‌بعد شده با یک مقدار مرجع	Reference Normalized Wave Amplitude (RNWA)
انرژی طیفی	Spectral Energy
کانتراوارینت	Contravariant
رانگ-کوتا	Runge-Kutta
روش طیفی زمانی تطبیقی	Adaptive Time Spectral

تقدیر و تشکر

مراجع

[1] K. C. Hall, J. P. Thomas, and W. S. Clark, “Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique,” *AIAA J.*, vol. 40, no. 5, pp. 879–886, 2002.

[2] S. M. Murman, and M. Field, “A Reduced-Frequency Approach for Calculating Dynamic Derivatives,” *AIAA Journal*, vol. 45, no. 6, pp. 1161-1168, 2007.

[3] K. Gopinath, A. Jameson, “Application of the time spectral method to periodic unsteady vortex shedding,” In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 449, (2006).

[4] S. Choi, K. Lee, M. M. Potsdam, and J. J. Alonso, “Helicopter rotor design using a time-spectral and adjoint-based method,” *Journal of Aircraft*, vol. 51, no. 2, pp. 412-423, 2014.

[5] L. Mundis, and D. J. Mavriplis, “An efficient flexible GMRES solver for the fully-coupled time-spectral aeroelastic system,” In *52nd Aerospace Sciences Meeting,* p. 1427, (2014).

[6] D. J. Mavriplis, and Z. Yang, “Time spectral method for periodic and quasi-periodic unsteady computations on unstructured meshes,” *Mathematical Modelling of Natural Phenomena,* vol. 6, no. 3, pp. 213-236, 2011.

[7] Z. Yang, D. Mavriplis, and J. Sitaraman, “Prediction of Helicopter Maneuver Loads Using BDF/Time Spectral Method on Unstructured Meshes,” In *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition,* p. 1122, (2011).

[8] D. J. Mavriplis, Z. Yang, and N. Mundis, “Extensions of time spectral methods for practical rotorcraft problems,” In *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition,* p. 423, January, (2012).

[9] J. Leffell, *An overset time-spectral method for relative motion*, Stanford University, 2014.

[10] L. Zhan, J. Xiong, F. Liu, and Z. Xiao, "Fully implicit Chebyshev time-spectral method for general unsteady flows," *AIAA Journal*, vol. 56, no. 11, pp. 4474–4486, 2018.

[11] R. Djeddi, and K. Ekici, "An Adaptive Mesh Redistribution Approach for Time-Spectral/Harmonic-Balance Flow Solvers," In *2018 Fluid Dynamics Conference,* p. 3245, (2018).

[12] F. Plante, and E. Laurendeau, "Simulation of transonic buffet using a time-spectral method," *AIAA Journal,* vol. 57, no. 3, pp. 1275–1287, 2019.

[13] S. He, *Aerodynamic Shape Optimization using a Time-Spectral Approach for Limit Cycle Oscillation Prediction*, PhD diss., 2021.

[14] R. C. Maple, *Adaptive harmonic balance method for unsteady, nonlinear, one-dimensional periodic flows,* Ph.D. thesis, Air Force Institute of Technology, 2002.

[15] C. Maple, P. I. King, and M. E. Oxley, "Adaptive harmonic balance solutions to Euler's equation," *AIAA Journal*, vol. 41, no. 9, pp. 1705–1714, 2003.

[16] A. Mosahebi, and S. Nadarajah, "An adaptive non-linear frequency domain method for viscous flows," *Computers & Fluids*, vol. 75, pp. 140-154, January, 2013.

[17] R. H. Landon, *NACA 0012 oscillatory and transient pitching,* AGARD Report 702, January, 1982.

[18] J. S. Hesthaven, S. Gottlieb, and D. Gottlieb, *Spectral methods for time-dependent problems*, vol. 21, Cambridge University Press, 2007.

[19] A. K. Gopinath, *Efficient Fourier-based algorithms for time-periodic unsteady problems*, Stanford University, 2007.

[20] A. Mosahebi, "An Implicit Adaptive Non-Linear Frequency Domain Method for Periodic Viscous Flows on Deformable Grids," McGill University, 2012.

[21] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel, "Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes", *14th Fluid and Plasma Dynamic Conference*, p. 1259, (1981).

[22] E. Ly, *Numerical Schemes for Unsteady Transonic Flow Calculation*, Ph.D. Thesis, Melbourne Victoria Australia, September, 2000.